Rješenja prvog kolokvija

"Uvek je sumnjivo kad neko misli za sebe da je pametan."
– *M. Selimović*

(I) Numerički zadaci:

1. *Svi u napad.*

(a) energija predana lopti je jednaka kinetičkoj energiji lopte, $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \approx 110$ J. U dvije čokoladice je dobio ukupnu energiju $4000 \cdot 0.6 = 2400$ kJ, što znači da može izvesti oko 22000 takvih udaraca ako ništa drugo ne radi (naravno, trčanje troši puno više!)

(b) srednja sila pomnožena s vremenom trajanja udarca je jednaka početnom impulsu lopte, odnosno

$$\langle F \rangle \tau = mv_0$$

iz čega slijedi da je srednja sila $\langle F \rangle \approx 200$ N. Moment je lako naći iz definicije, uzmemo li da djeluje okomito na nogu (što nije sasvim točno, ali nije loša aproksimacija za cijelu duljinu trajanja udarca): $\langle M \rangle \approx \langle F \rangle L \approx 160$ Nm.

(c) jedina sila na loptu za vrijeme leta je gravitacija prema dolje (tokom udarca djeluje još i noga, ali to nas ovdje ne zanima). Jednadžbe gibanja su prema tome

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

u x-smjeru i

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg$$

u y-smjeru. To naravno vodi na standardne jednadžbe kosog hica, iz kojih je lako izvesti formulu za domet: $L = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Domet je jednak udaljenosti Luke od gol-crte (11 m), pa se za kut dobiva $2\alpha \approx 13^{\circ}$, $\alpha \approx 6^{\circ}$.

(d) ako se gravitacija zanemaruje, putanja lopte, visina gola i udaljenost Luke od gola čine pravokutni trokut, što znači da za kut između brzine lopte i horizontale vrijedi $\tan\alpha_{max} = h/L$, pa za kut izlazi $\alpha_{max} \approx 12.5^{\circ}$. Pravi kut je naravno veći, jer gravitacija skreće loptu prema dolje.

(e) 0:0, nije ni brazilski golman sisao veslo

2. *Bugarski kišobran.*

(a) $E(x)$ je za male x-eve kvadratna s pozitivnom konstantom dok za velike x-eve prevladava negativni član s x^4. Maksimum energije pri tome očito postoji (jer za male x-eve raste a za velike pada). Maksimum tražimo derivacijom:

$$\frac{dE}{dx} = kx - Kx^3$$

Ako ovaj rezultat izjednačimo s nulom dobijemo točke u kojima je funkcija ekstremalna:

$$x_{ex}(k - Kx_{ex}^2) = 0$$

Jedno rješenje je očito $x = 0$ i to sa skice prepoznajemo kao minimum, dok su druga dva rješenja:

$$x_{max}^2 = \frac{k}{K}$$

Maksimum energije je u točkama $x_{max} = \pm\sqrt{k/K}$. *(4 boda)*

(b) Ako rastegne oprugu za x_{max} tada je energija pohranjena u opruzi:

$$E_{max} = \frac{1}{2}kx_{max}^2 - \frac{1}{4}Kx_{max}^4 = \frac{k^2}{2K} - \frac{k^2}{4K} = \frac{k^2}{4K}$$

Ta energija se preda metku kao kinetička, pa je brzina metka:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{k^2}{4K}$$

$$v_0^2 = \frac{k^2}{2Km} \Rightarrow v_0 = \frac{k}{\sqrt{2mK}}$$

(2 boda)

(c) Metak unutar dvostrukog agenta osjeća silu F_D, pa je njegova jednadžba gibanja:

$$ma = -\beta v \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\beta mv$$

Rješenje jednadžbe:

$$\frac{dv}{dt} = -\beta v$$

Prebacimo sve što ovisi o brzini na lijevu stranu i integriramo:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\beta \int_0^t dt$$

Desni integral je trivijalan a lijevi je tablični:

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\beta t$$

Konačno, ovisnost brzine o vremenu je (riješimo se logaritma):

$$v = v_0 e^{-\beta t}$$

(2 boda)

(d) Uvrštavanjem relacije iz d) u c) dobijemo:

$$v\frac{dv}{dx} = -\beta v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\beta$$

Sada je rješenje, elementarnom integracijom:

$$v(x) = v_0 - \beta x$$

Ako je debljina agenta L tada je izlazna brzina metka iz agenta (još uvrstimo v_0 iz b):

$$v(L) = v_0 - \beta L = \frac{k}{\sqrt{2mK}} - \beta L$$

(5 bodova)

(e) Trebamo naći duljinu D na kojoj će brzina metka biti nula:

$$v(D) = 0 = \sqrt{\frac{k^2}{K}\frac{1}{2m}} - \beta D$$

$$D = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{k^2}{K}\frac{1}{2m}} = 1.93\text{m}$$

Metak može putovati 1.93 metra prije zaustavljanja. Kako je debljina agenata $L = 40$ cm, kroz četiri agenta $4L = 1.6$ m će metak skroz proći i zaustaviti će se u petom. *(1 bod)*

Ukupno: 14 bodova

3. *Molekularni balet.*

(a) Centar mase dvije jednake mase se nalazi točno između njih. *(1 bod)*

(b) Kada rastegnemo vezu za x, svaki atom se pomakne za $x/2$ (jer CM miruje). Sila koju svaki atom osjeća je sila opruge, koja je rastegnuta za x. Promatramo lijevi atom:

$$m\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot 2(x/2) = kx$$

Jedna polovina uz akceleraciju je zato jer se pojedinačni atom miče za pola puta. Oni skupa šire oprugu za x. Jednadžba gibanja za desni atom je ista, uz predznak sile plus i prednak ispred akceleracije minus, jer opruga desni atom vuče na lijevo. Frekvenciju očitamo iz jednadžbe harmoničkog oscilatora:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

(4 boda)

(c) Moment inercije za dva atoma je, gledano iz centra mase:

$$I = m(R/2 + x/2)^2 + m(R/2 + x/2)^2 = \frac{m}{2}(R + x)^2$$

Udaljenost atoma od centra mase je $\frac{1}{2}(R + x)$. Moment inercije u ravnoteži je:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

(3 boda)

(d) Molekula se vrti kutnom brzinom ω oko centra mase. Na svaki atom djeluje centrifugalna sila:

$$F = m(R/2 + x/2)\omega^2$$

Ravnotežno rastegnuće se postigne kada se centrifugalna sila izjednači sa silom opruge (na svaki atom):

$$F = m(R/2 + x/2)\omega^2 = \frac{m}{2}\left(R + x\right)\omega^2 = kx$$

$$R\omega^2 + x\omega^2 = \omega_0^2 x$$

$$x_{rav} = \frac{R\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(1 bod)

(e) Uvrštavamo u formulu za moment inercije:

$$I = \frac{m}{2}(R + x)^2 = \frac{m}{2}\left(R + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}R\right)^2 = \frac{mR^2}{2}\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2$$

$$I(\omega) = \left(\frac{\omega_0^2/\sqrt{2}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2 mR^2$$

(4 boda)

(f) zadane su vrijednosti:

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 12\text{THz} \ , \ I(\omega_1) = 7.93u\text{kg A}$$

$$\omega_2 = 2\pi \cdot 24\text{THz} \ , \ I(\omega_2) = 8.69u\text{kg A}$$

Ako podijelimo $I(\omega_1)$ i $I(\omega_2)$ tada imamo:

$$\frac{I(\omega_1)}{I(\omega_2)} = \left(\frac{\omega_0^2 - \omega_2^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right)^2$$

Iz toga možemo izračunati ω_0:

$$\omega_0^2 - \omega_2^2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\left(\omega_0^2 - \omega_1^2\right)$$

$$\left(1 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\right)\omega_0^2 = \omega_2^2 - \sqrt{\frac{I_1}{I_2}}\omega_1^2$$

Dobije se:

$$0.044729\omega_0^2 = (576 - 137.559)(2\pi)^2\text{THz}^2$$

$$\omega_0 = 99 \cdot 2\pi\text{THz}$$

Iz toga se može naći konstanta opruge:

$$k = 4.5 \text{ kN/m}$$

Uz poznavanje ω_0 možemo izračunati i R:

$$I_1 = \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_1^2}\right)^2 \frac{m}{2}R^2$$

$$R = 1.05\text{A}$$

(1 bod)

Ukupno: 16 bodova

(II) Konceptualni zadaci:

1. Gumeni auto bi se odbijao od drugih auta, zidova, stupova etc., što bi uzrokovalo vrlo velike akceleracije u slučaju sudara (trzaje) koji bi pobili one unutra.
2. Zato što kruži – u sistemu Mjeseca, gravitacijska sila Zemlje je izjednačena s centrifugalnom silom zbog rotacije
3. Centar mase se giba jednoliko po pravcu, a astronaut se vrti konstantnom kutnom brzinom oko osi koja prolazi kroz centar mase.
4. Nagibni vlak je brži u zavojima, jer pomicanjem težišta kompenzira centrifugalnu silu zbog gibanja po segmentu kružnice (zavoju), koja ovisi o brzini.
5. Zato što pero ima mnogo veći omjer površine i mase, što znači da otpor zraka dominira nad gravitacijskom silom. Klavir ima veliku povrđinu, ali je i težak, pa kod njega dominira gravitacija i pada brže.